

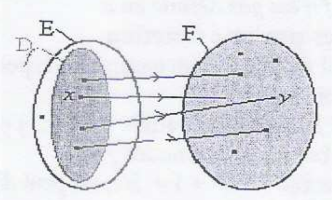


ANALYSE MATHEMATIQUE « NOTES DE COURS »
Prof :« GUEMIMI CHAFIK » E7 et E8
GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

L'étude générale d'une fonction numérique de la variable réelle a été abordée en Terminale. Nous nous contenterons ici de brefs rappels. Nous vous invitons cependant à revoir soigneusement dans votre cours de Terminale.

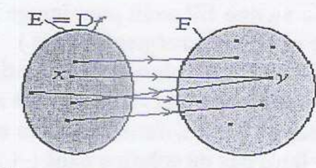
1. Définition générale d'une fonction

Soient E et F deux ensembles d'éléments, la correspondance qui à tout élément x de E fait correspondre au plus un élément y appartenant à F est appelé fonction.

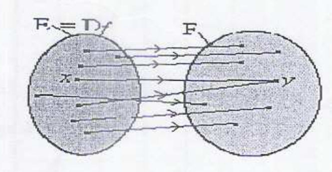


Le sous ensemble Df contenant les éléments x appartenant à E à qui on fait correspondre un élément dans F est appelé domaine ou ensemble de définition de la fonction f.
Cas particulier :

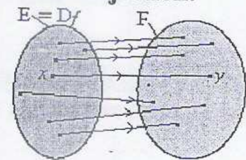
- Si E = Df , on dit que f est une application de E dans F.



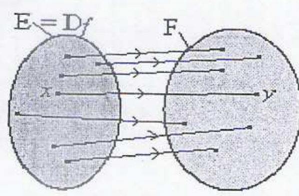
- Si l'application f est telle que tout élément y de l'ensemble F est l'image d'au moins un élément x de l'ensemble E, on dit que *f* est une **surjection**



- Si l'application f est telle que tout élément y de F est l'image d'au plus un élément x de l'ensemble E , on dit que f est une **injection**.



- Si l'application f est à la fois une **surjection** et une **injection** on dit que c'est une **bijection**.





2. Ensemble de définition d'une fonction

Qu'est ce qu'une fonction numérique de variable réelle ?

Soit D un ensemble de nombre réel ($\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$) . Lorsqu' à chaque nombre réel x de D on fait correspondre un nombre réel et un seul, on dit que l'on définie une fonction sur D. **Exemple :** soit la fonction qui à tout réel de l'intervalle [-1;1] on fait correspondre son carré augmenté de 1 alors peut résumer par : f définie sur [-1;1] par $f(x) = x^2 + 1$ ou alors par f : [-1;1] $\rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2 + 1$

.L'ensemble D est appelé **ensemble de définition** de la fonction. L'ensemble de définition d'une fonction est donné arbitrairement dans l'énoncé définissant la fonction sinon il est à <u>déterminer naturellement</u>.

Remarque : soit a un nombre réel et D_f l'ensemble de définition d'une fonction, si $a \in D_f$, on dit que f est définie en a , si $a \notin Df$ f n'est pas définie en a.

Antécédents et images par une fonction

Lorsqu'une fonction f est définie sur un ensemble D, pour chaque nombre appartenant à D, le nombre qui lui correspond est appelé son **image**.

Exemple : si on reprend la fonction f définie sur [-1;1] par $f(x) = x^2 + 1$,

L'image de 0 est le nombre 1 par la fonction f.

L'image de 1/2 est le nombre $(1/2)^2 + 1 = 5/4$, on peut dire aussi 1/2 a pour image 5/4 par f et noté simplement $f(1/2) = 5/4$.

Inversement, à partir d'un nombre réel b fixé, peut-on déterminer un réel a qui a pour image b, si oui, le nombre réel a est appelé un **antécédent** de b par f.

Exemple : 1 admet un admet un seul antécédent par la fonction que l'on a définit plus haut, en effet $f(0) = 1$, et il n'existe pas d'autre réel dont l'image est 1, en effet l'équation $x^2 + 1 = 1$ admet une seule solution.

Prenons le nombre 5/4, on a vu que 1/2 avait pour image 5/4, on peut donc en déduire que 1/2 est un antécédent de 5/4 (mais ce n'est pas forcément le seul)

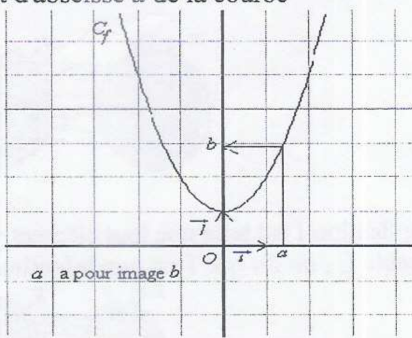
en effet un antécédent de 5/4 doit être solution de l'équation $x^2 + 1 = 5/4$

cette équation admet deux solutions 1/2 et -1/2 donc 5/4 admet deux antécédents qui sont 1/2 et -1/2.

Prenons le nombre 0, ce nombre n'a pas d'antécédent en effet il n'existe aucun réel x qui a pour image 0 par f puisque l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans [-1 ; 1] (pas plus dans $\mathbb{R}$)

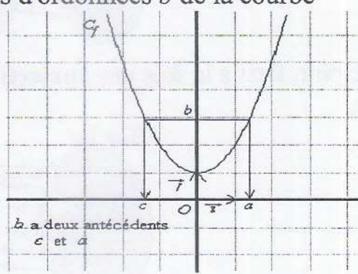
<u>Graphiquement : on retrouve l'image du nombre réel *a* :</u>

En lisant l'ordonnée *b* du point d'abscisse *a* de la courbe



<u>Graphiquement : on retrouve l'antécédent du nombre réel *b* :</u>

En lisant les abscisses des points d'ordonnées *b* de la courbe



Recherche de l'ensemble de définition d'une f quand il n'est pas donné dans l'énoncé : On utilise les résultats suivants :



- Un quotient est défini si son dénominateur est défini et est non nul. (on ne peut pas diviser par 0)

$f(x) = \frac{3x-1}{x^2-4}$

$x^2-4=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ ou $x+2=0$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

$x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$

$D_f = \mathbb{R} - \{-2;2\}$

- La racine carré d'une expression est définie si cette expression est définie et positive. (la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas dans $\mathbb{R}$)

$f(x) = \sqrt{3x-1}$

$3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 1$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

$D_f = \left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

- Le logarithme népérien d'une expression est défini si cette expression est définie et strictement positive. (le logarithme népérien d'un nombre réel négatif n'existe pas)

$f(x) = \ln(1-2x)$

$1-2x > 0 \Leftrightarrow 1 > 2x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} > x$

$D_f = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

Recherche d' ensemble ou de domaine de définition d'une fonction - exemples :

Exemple 1 :

$f(x) = \frac{3x}{x-1} + \ln x$

D_f est l'ensemble des réels x appartenant à $\mathbb{R}$

tel que $x-1 \neq 0$ et $x > 0$

donc $x \neq 1$ et $x > 0$

$x \in (]-\infty;1[\cap]1;+\infty[) \cap]0;+\infty[$

$x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$

$D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$

Exemple 2 :

$f(x) = \ln(x-1) + \sqrt{5-x}$

D_f est l'ensemble des réels x appartenant à $\mathbb{R}$

tel que $x-1 > 0$ *et* $5-x \geq 0$

donc $x > 1$ et $x \leq 5$

$x \in]1;+\infty[\cap]-\infty;5]$

$x \in]1;5]$

$D_f =]1;5]$



Exemple 3 :

$f(x) = \sqrt{\ln x + 1}$

$f(x) = \sqrt{\ln x + 1}$

D_f est l'ensemble des réels x appartenant à $\mathbb{R}$

tel que $x > 0$ et $\ln x + 1 \geq 0$

$x \in]0; -\infty[$ et $\ln x \geq -1$

$x \in]0; -\infty[$ et $x \geq e^{-1}$

$x \in]0; -\infty[$ et $x \in \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$

$x \in]0; -\infty[\cap \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$

$x \in \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$

$D_f = \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$

Ensemble de définition d'une somme ou d'un produit de fonctions

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les ensembles de définitions : D_f et D_g

L'ensemble de définition des fonctions p = fg et s = f + g est $D_f \cap D_g$

Explication : pour que f + g ou fg soient définies, il faut que f et g soient définies.

Exemple 1 :

$f(x) = 2x - 6 \quad D_f =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{x - 3} \quad D_g = [3; +\infty[$

$s(x) = f(x) + g(x)$

$x \in D_s \Leftrightarrow$

$x \in \mathbb{R}$ et $x \in [3; +\infty[\Leftrightarrow$

$x \in [3; +\infty[$

$D_s = [3; +\infty[$

Exemple 2 :

$f(x) = \sqrt{x} \quad D_f = [0; +\infty[$

$g(x) = \sqrt{3 - x} \quad D_g =]-\infty; 3]$

$p(x) = f(x)g(x)$

$x \in D_p \Leftrightarrow$

$x \in [0; +\infty[$ et $x \in]-\infty; 3] \Leftrightarrow$

$x \in [0; 3]$

$D_p = [0; 3]$



Exemple 3 :

$f(x) = \sqrt{x} \quad D_f = [0;+\infty[$

$g(x) = \sqrt{x-4} \quad D_g = [4;+\infty[$

$p(x) = f(x)g(x)$

$x \in D_p \Leftrightarrow$

$x \in [0;+\infty[$ et $x \in [4;+\infty[\Leftrightarrow$

$x \in [4;+\infty[$

$D_p = [4;+\infty[$

attention !

$p(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-4} = \sqrt{x(x-4)}$

mais $D_p \neq]-\infty;+\infty] \cup [4;+\infty[$ même si

$x(x-4) \geq 0$ sur $]-\infty;+\infty] \cup [4;+\infty[$

Ensemble de définition d'une fonction quotient

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les ensembles de définitions : D_f et D_g

L'ensemble de définition de la fonction q = f/g est

$D_q = D_f \cap \{ x \in D_g \text{ ; tel que } g(x) \neq 0 \}$

Explication : pour que f/g soit définie, il faut que f soit définie, g soit définie et telle que g $\neq 0$.

Exemple 1 :

$f(x) = \sqrt{x-1} \quad D_f = [1;+\infty[$

$g(x) = \sqrt{3-x} \quad D_g =]-\infty;3]$

$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$x \in D_q \Leftrightarrow$

$x \in [1;+\infty[$ et $x \in]-\infty;3]$ et $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow$

$x \in [1;3]$ et $\sqrt{3-x} \neq 0 \Leftrightarrow$

$x \in [1;3]$ et $x \neq 3 \Leftrightarrow$

$x \in [1;3[$

$D_q = [1;3[$

Exemple 2 :

$f(x) = 2x - 6 \quad D_f =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{x-5}{x+2} \quad D_g =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$x \in D_q \Leftrightarrow$

$x \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et $\frac{x-5}{x+2} \neq 0 \Leftrightarrow$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et $x \neq 5 \Leftrightarrow$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 5\}$

$D_q = \mathbb{R} \setminus \{-2; 5\}$

Exemple 3 :

$f(x) = 2x - 6 \quad D_f =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

$g(x) = x - 3 \quad D_g =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$x \in D_q \Leftrightarrow$

$x \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow$

$x \in \mathbb{R}$ et $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow$

$x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 3 \Leftrightarrow$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$D_q = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

attention $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-6}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} = 2$

même après simplification $D_q = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Ensemble de définition d'une composée de fonctions

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les ensembles de définitions : D_f et D_g

L'ensemble de définition de la fonction c = f o g composée de la fonction g suivie de la fonction f est

$D_c = \{ x \in D_g$ tel que $g(x) \in D_f \}$

Explication : pour que f o g soit il faut d'abord que g soit définie, donc il faut que $x \in D_g$ puisque c'est la première fonction que l'on utilise dans la composée f o g , puis il faut que f(g(x)) existe donc il faut $g(x) \in D_f$.

$$x \overset{g}{\mapsto} g(x) \overset{f}{\mapsto} f(g(x))$$

$$x \in D_g \qquad g(x) \in D_f$$



Exemple 1 :

$f(x) = \sqrt{x} \quad D_f = [0;+\infty[$

$g(x) = x^2 - 4 \quad D_g =]-\infty;+\infty[$

<u>ensemble de définition de $(f \circ g)$</u>

$x \in D_{f \circ g} \Leftrightarrow$

$x \in D_g$ et $g(x) \in D_f \Leftrightarrow$

$x \in]-\infty;+\infty[$ et $g(x) \in [0;+\infty[\Leftrightarrow$

$x \in]-\infty;+\infty[$ et $x^2 - 4 \in [0;+\infty[\Leftrightarrow$

$x \in]-\infty;+\infty[$ et $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow$

$x \in]-\infty;+\infty[$ et $x \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[\Leftrightarrow$

$x \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$

$D_{f \circ g} =]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$

<u>ensemble de définition de $(g \circ f)$</u>

$x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow$

$x \in D_f$ et $f(x) \in D_g \Leftrightarrow$

$x \in [0;+\infty[$ et $f(x) \in]-\infty;+\infty[\Leftrightarrow$

$x \in [0;+\infty[$ et $\sqrt{x} \in]-\infty;+\infty[\Leftrightarrow$

$x \in [0;+\infty[$

$D_{g \circ f} = [0;+\infty[$

Partie : 1

5



Exemple 2 :

$f(x) = \frac{x-1}{x-2} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$g(x) = \sqrt{x} \quad D_g = [0;+\infty[$

ensemble de définition de $(f \circ g)$

$x \in D_{f \circ g} \Leftrightarrow$

$x \in D_g$ et $g(x) \in D_f \Leftrightarrow$

$x \in [0;+\infty[$ et $g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \Leftrightarrow$

$x \geq 0$ et $g(x) \neq 2 \Leftrightarrow$

$x \geq 0$ et $\sqrt{x} \neq 2 \Leftrightarrow$

$x \geq 0$ et $x \neq 4 \Leftrightarrow \Leftrightarrow$

$x \in [0;4[\cup]4;+\infty[$

$D_{f \circ g} = x \in [0;4[\cup]4;+\infty[$

ensemble de définition de $(g \circ f)$

$x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow$

$x \in D_f$ et $f(x) \in D_g \Leftrightarrow$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $f(x) \in [0;+\infty[\Leftrightarrow$

$x \neq 2$ et $\frac{x-1}{x-2} \in [0;+\infty[\Leftrightarrow$

$x \neq 2$ et $\frac{x-1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow$

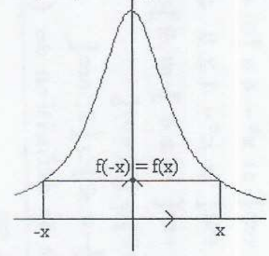
$x \neq 2$ et $x \in]-\infty,1] \cup]2;+\infty[\Leftrightarrow$

$D_{g \circ f} =]-\infty,1] \cup]2;+\infty[$

3. Fonction paire

Définition :

Soient f une fonction, D_f son ensemble de définition, C_f sa courbe représentative,
On dit que f est paire si pour tout réel x appartenant à D_f alors - x appartient à D_f et f(-x) = f(x)
(équivalent : 2 nombres opposés quelconques de D_f ont la même image par f)
C_f la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Comment prouver qu'une fonction est paire ?

Le principe : on montre que le domaine de définition D_f est symétrique par rapport à 0 et que deux nombres opposés quelconques de Df ont la même image par f, c'est pour cela que l'on utilise **x et -x**.
Le fait de montrer par exemple que -1 et 1 ont la même image par f ne permet pas de justifier que f est paire.



Exemple :

f définie sur $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2-1}$

$f(-x) = \dfrac{3(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \dfrac{3x^2+1}{x^2-1} = f(x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$; $-x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

et $f(-x)=f(x)$ donc f est paire

Comment prouver qu'une fonction est ni paire ni impaire ?

Attention pour prouver qu'une fonction est ni paire ni impaire, il suffit de montrer un contre exemple (on a plus besoin de x et -x)

Exemple :

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2$

$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = -1+1 = 0$

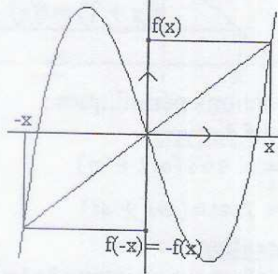
$f(1) = 1^3 + 1^2 = 1+1 = 2$

$\left.\begin{array}{l} f(-1) \neq f(1) \\ f(-1) \neq -f(1) \end{array}\right\}$ donc f est ni paire ni impaire.

Fonction impaire.

Définition :

Soient f une fonction, D_f son ensemble de définition, C_f sa courbe représentative,
On dit que f est impaire si pour tout réel x appartenant à D_f alors - x appartient à D_f et f(-x) = - f(x)
(équivalent : 2 nombres opposés quelconques de D_f ont des images opposées par f).
C_f la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Comment démontrer qu'une fonction est impaire ?

Le principe : on montre que le domaine de définition D_f est symétrique par rapport à 0 et que deux nombres opposés quelconques de Df ont des images opposées par *f*,
c'est pour cela que l'on utilise **x et -x**.
Le fait de montrer par exemple que -1 et 1 ont des images opposées par f ne permet pas de justifier que f est impaire.

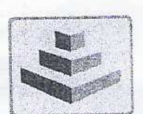
Exemple :

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x$

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $-x \in \mathbb{R}$

et $f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire



Attention pour prouver qu'une fonction est ni paire ni impaire, il suffit de montrer un contre exemple (on a plus besoin de x et -x)
Exemple :

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2$

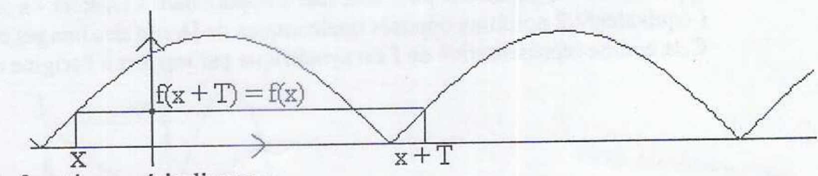
$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$$

$$f(1) = 1^3 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) \neq f(1) \\ f(-1) \neq -f(1) \end{array}\right\} \text{donc f est ni paire ni impaire.}$$

Fonction périodique.
Soient :

- f une fonction,
- D_f son ensemble de définition,
- C_f sa courbe représentative,
- T un nombre réel non nul.
- **On dit que f est T-périodique ou de période T:**
  si pour tout réel x appartenant à D_f :
  x + T appartenant à D_f et **f(x+ T) = f(x)**
  (équivalent : 2 nombres quelconques de différence T de D_f ont la même image par f)

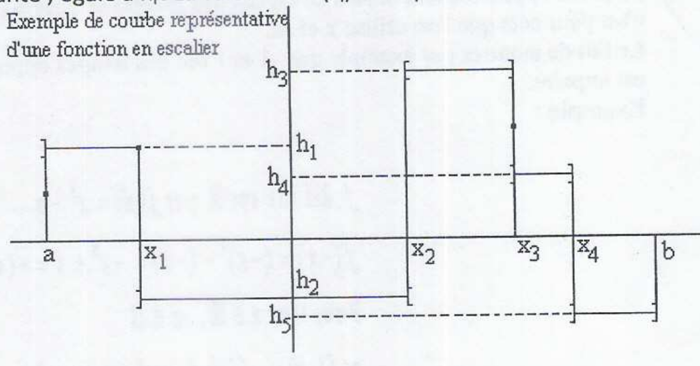


Exemple de fonctions périodiques :

- fonction f de type
  $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$
  $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

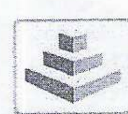
Fonction en escalier
Une fonction f définie sur un intervalle [a; b] est dite en escalier si il existe une suite finie croissante : $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n = b$ d'éléments de [a; b] tels que la restriction de f à chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ soit constante , égale à h_i . La valeur des $f(x_i)$ n'est pas liée à h_i et h_{i+1}.

Exemple de courbe représentative d'une fonction en escalier



2¹' 2ème partie

Université Hassan II – Ain Chock
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales Casablanca



ANALYSE MATHEMATIQUE « NOTES DE COURS »
Prof :« GUEMIMI CHAFIK »
GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE
Limites

Dans la notion de limite ce qui nous intéresse c'est le comportement de la fonction quand x prend de grandes valeurs positives ou négatives ou quand x se rapproche de valeurs pour lesquelles la fonction n'est pas définie, c'est pour cela que l'on demande souvent de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction.

Limite finie.

On dit qu'une fonction numérique f d'une variable réelle x tend vers une **limite finie** ℓ lorsque x tend vers x_0 si, et seulement si :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Lorsque la fonction f tend vers une limite ℓ, lorsque x tend vers x_0, on dit que f **"possède" une limite** ℓ en x_0.

Exemple :

Soit f(x)=5x+4 montrons que $\lim f(x) = 14$ *quand x tend vers* 2

Soit f(x)=1/x^3 Montrons que $\lim f(x) = 0$ *quand x tend vers l'infini*

Limite infinie.

On dit qu'une fonction numérique f d'une variable réelle x **tend vers l'infini** lorsque x tend vers x_0 si, et seulement si :

pour tout $A > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| > A$.

Une fonction f qui tend vers l'infini, lorsque x tend vers x_0, n'a pas de limite finie en x_0.

Exemple :

Soit f(x)=1/x^3 Montrons que $\lim f(x) = \infty$ *quand x tend vers* 0

Soit f(x)=7.x+3 Montrons que $\lim f(x) = \infty$ *quand x tend vers* ∞



À connaître : interprétations de la définition, $\lim\limits_{a} f = b$ *signifie :*

- *Si* $a, b \in \mathbb{R} : \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in I, |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$
- *Si* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b = +\infty : \forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in I, |x - a| < \alpha \Longrightarrow f(x) > A.$
- *Si* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b = -\infty : \forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in I, |x - a| < \alpha \Longrightarrow f(x) < A.$
- *Si* $a = +\infty$ *et* $b \in \mathbb{R} : \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, A \in \mathbb{R}, \forall\, x \in I, x > A \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$
- *Si* $a = +\infty$ *et* $b = +\infty : \forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, B \in \mathbb{R}, \forall\, x \in I, x > B \Longrightarrow f(x) > A$
- *Si* $a = +\infty$ *et* $b = -\infty : \forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, B \in \mathbb{R}, \forall\, x \in I, x > B \Longrightarrow f(x) < A$
- *Si* $a = -\infty$ *et* $b \in \mathbb{R} : \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, B \in \mathbb{R}, \forall\, x \in I, x < B \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$
- *Si* $a = -\infty$ *et* $b = +\infty : \forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, B \in \mathbb{R}, \forall\, x \in I, x < B \Longrightarrow f(x) > A$
- *Si* $a = -\infty$ *et* $b = -\infty : \forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, B \in \mathbb{R}, \forall\, x \in I, x < B \Longrightarrow f(x) < A$

Règles de calcul des limites.

1. **L'exponentielle l'emporte sur la puissance** : lorsque l'exponentielle tend vers 0 ou vers l'infini, le produit d'une fraction rationnelle par l'exponentielle a la même limite que l'exponentielle

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^s e^{-x} = 0$, pour tout $s > 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^s} = 0$, pour tout $s > 0$.

2. **La puissance l'emporte sur le logarithme** : lorsqu'une fraction rationnelle tend vers 0 ou vers l'infini, le produit de la fraction rationnelle par un logarithme a la même limite que la fraction rationnelle.

$\lim_{x \to 0} x^s \ln x = 0$, pour tout $s > 0$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^s} = +\infty$, pour tout $s > 0$.

Mais attention ! cette règle ne s'applique pas si l'on a autre chose que $\ln x$, par exemple :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

3. **Théorème des gendarmes**. Si, **au voisinage de** a, une fonction f est minorée par une fonction qui tend vers ℓ, lorsque x tend vers a, et majorée par une fonction qui tend aussi vers ℓ, lorsque x tend vers a, alors la fonction f tend aussi vers ℓ, lorsque x tend vers a.

$\lim_{x \to a} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \to a} h(x) = \ell$ et $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

La limite d'une fonction constante est la valeur de cette constante.

4. Le **passage à la limite est compatible** avec la somme, avec le produit, avec l'inverse :

$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$;

$\lim_{x \to a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$; $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} f(x)}$

Si $\lim_a f = \ell$ *et* $\lim_a g = \ell'$ *(dans* $\overline{\mathbb{R}}$*), alors :*

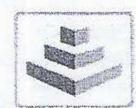
- $\lim_a f + g = \ell + \ell'$ *sauf si* $\ell = +\infty$ *et* $\ell' = -\infty$ *(ou l'inverse) : forme indéterminée.*
- $\lim_a f \times g = \ell\ell'$ *sauf si* $\ell = 0$ *et* $\ell' = \pm\infty$ *(ou l'inverse) : forme indéterminée.*
- *Si* $\lambda \in \mathbb{R}^*, \lim_a \lambda f = \lambda\ell$.
- *Si* f *ne s'annule pas au voisinage de a alors :*

$$\lim_a \frac{1}{f} = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } \ell = \pm\infty \\ +\infty & \text{si } \ell = 0 \text{ et } f > 0 \text{ au voisinage de } a \\ -\infty & \text{si } \ell = 0 \text{ et } f < 0 \text{ au voisinage de } a \\ \text{n'existe pas sinon} & \end{cases}$$

Formes dites « indéterminées » (FI) : quand x tend vers a (réel ou infini), il arrive que, selon l'expression de f (x), on ne sache pas a priori vers quoi va tendre ce dernier. Il y a quatre formes indéterminées à connaître : ce vers quoi tend f (x) se présente sous la forme :

∞ – ∞, ∞∞, 00, 0 ∞

Université Hassan II – Ain Chock
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales Casablanca



Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions et soit a un élément de I ou une extrémité de I.

- *On suppose qu'au voisinage de a, $f \leqslant g$, alors :*
  - *Si $\lim_a f = +\infty$ alors $\lim_a g = +\infty$.*
  - *Si $\lim_a g = -\infty$ alors $\lim_a f = -\infty$.*
- *Si $f \leqslant h \leqslant g$ au voisinage de a et si $\lim_a f = \lim_a g = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_a h = \ell$ (théorème des gendarmes ou de l'étau).*
- *Si $f \leqslant g$ au voisinage de a et si f et g ont chacune une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_a f \leqslant \lim_a g$ (théorème du passage à la limite).*
- *Si $\lim_a f = 0$ et si g est bornée au voisinage de a, alors $\lim_a f \times g = 0$.*
- *Si $\lim_a f = +\infty$ (respectivement $-\infty$) et si g est minorée au voisinage de a (respectivement majorée), alors $\lim_a f + g = +\infty$ (respectivement $-\infty$).*

Exercice 1

A. Etudier l'existence des limites suivantes et, le cas échéant, les calculer.

1°/ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

2°/ $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

3°/ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \tan x$

4°/ $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

5°/ $\lim_{x \to 0} x\, E\left(\frac{1}{x}\right)$

6°/ $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}$

7°/ $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x}\right)$

8°/ $\lim_{x \to 0} \frac{2 \tan x - \tan 2x}{x \sin^2 x}$

9°/ $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$

10°/ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$

11°/ $\lim_{x \to +\infty} x\, E\left(\frac{1}{x}\right)$

12°/ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(3x^2)}{x^2}$

13°/ $\lim_{x \to +\infty} (1 + x^2)\, e^{-x^2}$

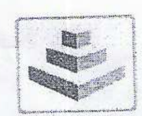
14°/ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

B. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application admettant $t > 0$ pour période et telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$. Montrer que f est une constante sur $\mathbb{R}$.

En déduire que la fonction $\sin : x \to \sin x$ n'a pas de limite pour x tendant vers l'infini.

1°/ Calculer $\lim_{x \to 0} x \ln x$.

2°/ En déduire $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.



1°/ Calculer $\lim_{x \to +\infty} x\, e^{-x}$.

2°/ En déduire $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x}$.

Calculer :

1°/ $\lim_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}-x}$.

2°/ $\lim_{x \to +\infty} (2\, ln\,(1+x) - ln\,(1+x^2))$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$

2) $f(x) = \cos^4 x - 2\cos^2 x$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x - 7}$

4) $f(x) = 2x - 3 - \frac{3}{x+2}$

5) $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{2(1-x)}$

Exercice n°2. Soit les fractions rationnelles suivantes : $P(x) = \frac{3x^3 + 8x^2 + 7x + 2}{x^2 - 3x - 4}$ et $Q(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

1) Donner l'ensemble de définition de $P(x)$ et $Q(x)$

2) Même question pour $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^2 + x - 2}$.

Exercice n°3. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)$

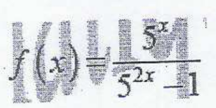
2) $f(x) = x\ln(|x|)$

3) $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 4)$

4) $f : x \to \ln\left(\frac{4 - x^2}{x}\right)$

Exercice n°4.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction suivante :

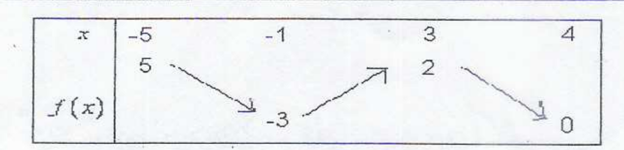


$f(x) = \frac{5^x}{5^{2x} - 1}$

Exercice n°5

1) Tracer dans un repère orthonormal $(O; i\,; j\,)$ (unité graphique 1 cm) la courbe d'une fonction f ayant le tableau de variation suivant :





x	-5		-1		3		4
$f(x)$	5	↘	-3	↗	2	↘	0

Et telle que :

- l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions : -4 , 3/2,et 4

$f(0) = -\frac{5}{2}$

2) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)$ £ 0

<u>Exercice n°5.</u>

La fonction f est définie sur l'intervalle [-5 ; 5]. Sa courbe représentative est tracée ci-dessous. *Par lecture graphique :*

1) Déterminer l'image de -3 par f

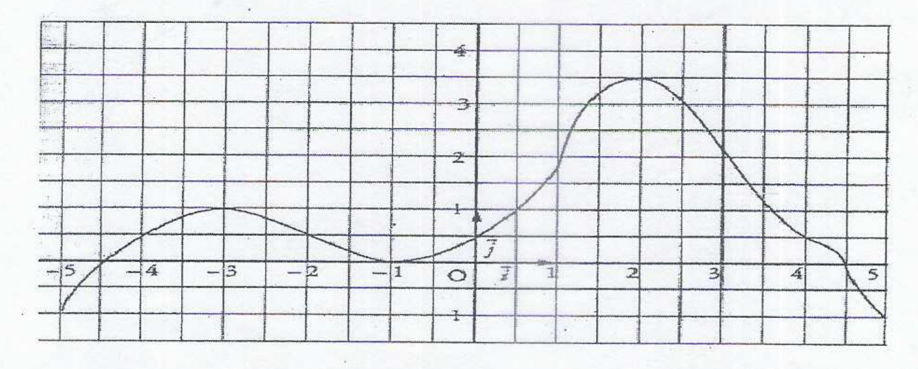
2) Déterminer $f(2)$

3) Ecrire deux phrases, l'une utilisant le mot «antécédent», l'autre utilisant le mot «image»

4) **Expliquez** comment résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$ puis donner la (les) solution(s)

5) Lire graphiquement le(s) antécédent(s) de 0.

6) **Expliquez** comment résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0,5$



<u>Exercice n°6</u>. Traduire par **une ou des égalité(s)** les phrases suivantes :

1) -5 est l'image de 4 par la fonction g

2) 2 a pour image 0 par la fonction f

3) Un antécédent de -3 par h est 5

4) Les images de -3 et 5 par f sont nulles

5) La courbe de la fonction f passe par le point (3;-1)

6) L'ordonnée du point d'abscisse -2 de la courbe C_f vaut -1

7) La représentation graphique de la fonction g coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3

8) La courbe C_h, représentant la fonction h, passe par l'origine

9) La courbe C_f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -3 et 5

<u>Exercice n°7</u>. Les tracés suivants correspondent-ils à celui d'une fonction numérique ?

